Schweizerische Armee

65.90/I d

Technische Grundlagen

für

Übermittlungsgerätemechaniker

Band I

Gültig ab 1. Oktober 1974

D. Die trigonometrischen Grundlagen

I. Die Winkelfunktionen

1. Einführung

Zur Berechnung von Wechselstromkreisen mit Wirk- und Blindwiderständen sind trigonometrische Funktionen unerlässlich. Wir wollen uns im folgenden Abschnitt das notwendige Rüstzeug erarbeiten. Die Trigonometrie umfasst die Berechnung von ebenen Dreiecken aller Art. Aus diesem vielseitigen Gebiet wollen wir uns nur die Materie herausholen, die für uns wichtig ist, und die uns die Möglichkeit gibt, Wechselstromkreise rechnerisch zu erfassen.
Amplitude, Phase und Frequenz sind die wichtigsten Kenngrössen von Wechselspannungen und Wechselströmen. Die Phasenlage einer Wechselstromgrösse wird im Winkel- oder Bogenmass angegeben. Die zu jeder Phasenlage gehörende Amplitude entspricht einer Winkelfunktion. Die erwähnten Beispiele liessen sich beliebig erweitern, wir wollen jedoch davon absehen, da den meisten die Begriffe der Wechselstromtechnik noch fremd sein dürften. Aus unserer Aufzählung entnehmen wir jedoch die Tatsache, dass die Lehre von den Winkelfunktionen dasjenige Teilgebiet der Trigonometrie ist, mit welchem wir uns näher zu befassen haben.

2. Was wissen Sie schon über die Winkelfunktionen?
(Lösung Seite 430)

a) Nennen Sie zwei der vier gebräuchlichsten Winkelfunktionen.
b) Nennen Sie ein Winkel- und Bogenmass.
c) Was verstehen Sie unter dem Ausdruck «Einheitskreis»?
d) Kennen Sie ein Beispiel aus der Elektrotechnik, wo eine Winkelfunktion eine Rolle spielt?
e) Was muss an einem rechtwinkligen Dreieck bekannt sein, damit eine Winkelfunktion bestimmt werden kann?
f) Ist es möglich, die Winkelfunktionen für einen Winkel zu bestimmen, der grösser ist als 90°?

3. Die Winkelfunktionen

a. Der Einheitskreis

Der Einheitskreis ist ein Kreis mit dem Radius Eins. Es kann sich dabei um irgend eine Masseinheit handeln, der Radius kann ein Zentimeter, ein Kilometer oder ein Millimeter lang sein, das spielt keine Rolle, die einzige Bedin-

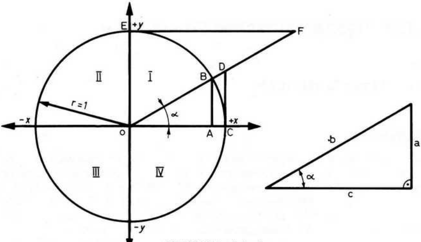


Bild 39 Einheitskreis

gung ist die, dass alle Seiten des rechtwinkligen Dreieckes, welches in diesen Einheitskreis hineingezeichnet wird, mit derselben Masseinheit gemessen werden wie der Radius des Kreises. Bild 39 zeigt uns die Verhältnisse im Einheitskreis.

Durch den Kreismittelpunkt ziehen wir eine horizontale Achse und benennen diese als X-Achse, senkrecht zu dieser X-Achse steht die Y-Achse; die beiden Achsen schneiden sich im Mittelpunkt des Kreises. Im Schnittpunkt liegt für beide Achsen der Nullpunkt. Vom Nullpunkt aus werden die positiven Werte der Achsen nach rechts und nach oben aufgetragen, während die negativen Werte nach links und nach unten aufgetragen sind. Die beiden Achsen bilden ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Der Einheitskreis schneidet die Achsen beim Wert Eins. In einem Koordinatensystem unterscheidet man vier Quadranten. Der erste Quadrant wird von der positiven X-Achse und von der positiven Y-Achse begrenzt. Die Zählrichtung für die restlichen Quadranten läuft gegen den Uhrzeigersinn.

b. Die Winkelfunktionen im Einheitskreis

Winkelfunktionen sind bestimmte Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck. Im Einheitskreis nach Bild 39 wird der Wert der *Sinusfunktion* durch die Strecke $\overline{AB}$ dargestellt. Im rechtwinkligen Dreieck nach Bild 39 ergibt das Verhältnis der Dreieckseite a zur Dreieckseite b den Wert der Sinusfunktion für den Winkel α. Die Seite b aus Bild 39 entspricht dem Radius des Einheitskreises. Dies ist der Grund, warum im Einheitskreis die Strecke $\overline{AB}$ mit dem Wert der Sinusfunktion für den Winkel α identisch ist, da der Radius den Wert Eins aufweist. Der *Kosinus* des Winkels α wird im Einheitskreis durch die Strecke $\overline{OA}$ dargestellt. Im rechtwinkligen Dreieck ausserhalb des Einheitskreises bestimmt das Verhältnis der Seite c zur Seibe b seinen Wert. Der Wert der *Tangensfunktion* wird im Einheitskreis durch die Strecke $\overline{CD}$ dargestellt. Im rechtwinkligen Dreieck ergibt das Verhältnis der Seite a zur Seite c denselben Wert. Die *Kotangensfunktion* wird im Einheitskreis durch die Strecke $\overline{EF}$ bestimmt, während im rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis der Seite c zur Seite a deren Wert ergibt. In der Tabelle 8 sehen wir eine Zusammenstellung dieser vier Winkelfunktionen.

Funktion des Winkels α	Bestimmungsstrecke im Einheitskreis	Verhältnis im rechtwinkligen Dreieck
$\sin\alpha$	$\overline{AB}$	$\frac{a}{b}$
$\cos\alpha$	$\overline{OA}$	$\frac{c}{b}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\overline{CD}$	$\frac{a}{c}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\overline{EF}$	$\frac{c}{a}$

An Stelle von tg und ctg kann auch tan und cot verwendet werden.

Tabelle 8

Aus dem Einheitskreis ersehen wir noch ein Gesetz, das uns später bei der Bestimmung der Winkelfunktionen aus Tabellen oder am Rechenschieber nützlich sein wird:

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$
$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\,(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$$
$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$$

Die Werte der verschiedenen Winkelfunktionen ändern ihre Vorzeichen, je nachdem in welchem Quadranten wir uns befinden. Für die Sinus- und die Kosinusfunktion ist die Bestimmung der Vorzeichen einfach, da beide Funktionen entweder auf der X-Achse oder auf der Y-Achse liegen; die Vorzeichen entsprechen dann den Vorzeichen der entsprechenden Achse. Schwieriger gestaltet sich die Vorzeichenbestimmung bei der Tangens- und der Kotangensfunktion, wir müssen dabei die Vorzeichen der beiden Dreiecksseiten, die die Winkelfunktion bestimmen, berücksichtigen. Nachstehende Tabelle gibt einen Überblick über die Vorzeichen der Winkelfunktionen in den vier Quadranten:

Quadrant Funktion	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tg	+	−	+	−
ctg	+	−	+	−

c. Die Winkelmasse

Winkel werden im Gradmass oder im Bogenmass gemessen. Im gebräuchlichsten Gradmass hat der volle Winkel 360°.
Das Bogenmass, gemessen in Radianten (rad), bezieht sich auf den Einheitskreis. Man gibt die zum Radius Eins gehörige Bogenlänge des Winkels an. Der volle Winkel entspricht dem Umfang des Einheitskreises und umfasst 2π rad.

d. Graphische Darstellung der vier Winkelfunktionen

Die Werte der Winkelfunktionen bestimmt man mit Hilfe von Tabellen oder unter Benützung eines Rechenschiebers. Stehen beide Hilfsmittel nicht zur Verfügung, so lassen sich die Funktionswerte auch zeichnerisch ermitteln, indem man einen Einheitskreis mit möglichst grossem Radius zeichnet und in diesem Kreis den gewünschten Winkel einzeichnet, der gesuchte Wert der Winkelfunktion kann dann durch Messen der Länge der entsprechenden Bestimmungsstrecke ermittelt werden; dabei muss natürlich der gewählte Massstab für den Radius berücksichtigt werden.
Bild 40 zeigt die graphische Darstellung der Sinus- und Kosinusfunktion, während Bild 41 die Tangens- und Kotangensfunktion darstellt.
Wir erkennen, dass sich die Sinus- und die Kosinusfunktion lediglich in der Phasenlage unterscheiden, in der Form sind beide Kurven gleich. Der Phasenunterschied beträgt 90° im Gradmass gemessen oder $\pi/2$ im Bogenmass.
Die Tangens- und die Kotangensfunktion sind in der Form ebenfalls gleich, sie verlaufen jedoch spiegelbildlich zueinander. Die Tangensfunktion steigt

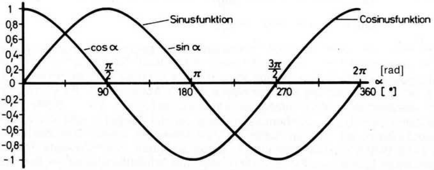


Bild 40

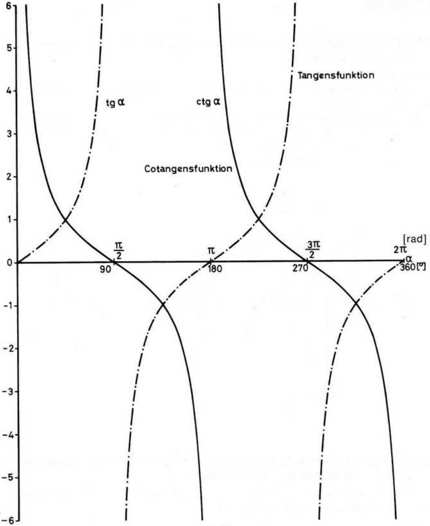


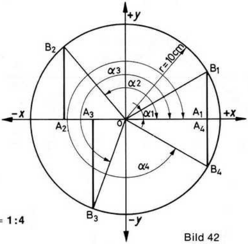
Bild 41

vom Wert Null bis zum Wert plus Unendlich, macht dann einen Sprung und kommt vom Wert minus Unendlich wieder zur Nullinie zurück. Die Kotangensfunktion verhält sich umgekehrt, sie kommt vom Wert plus Unendlich, geht durch Null, um nach minus Unendlich zu streben. Dort macht sie auch einen Sprung und kommt wieder vom Wert plus Unendlich gegen Null. Dieses Verhalten der beiden Funktionen ist leicht verständlich, stehen doch ihre Werte reziprok zueinander.

4. Beispiele

a. Bestimmung der Sinusfunktion für vier Winkel in den vier Quadranten mit Hilfe des Einheitskreises

Vorgehen:
Wir zeichnen einen Einheitskreis mit dem Radius von 10 cm und zeichnen folgende Winkel ein: $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 130°$, $\alpha_3 = 250°$, $\alpha_4 = 330°$
Nun konstruieren wir die Bestimmungsstrecken und messen deren Länge. Unter Berücksichtigung der Vorzeichen erhalten wir folgende Werte:
$\sin\alpha_1 = 0{,}5$, $\sin\alpha_2 = 0{,}766$, $\sin\alpha_3 = -0{,}940$, $\sin\alpha_4 = -0{,}5$
Bild 42 erläutert dieses Vorgehen.



$\sin\alpha_1 = \overline{A_1B_1}$
$\sin\alpha_2 = \overline{A_2B_2}$
$\sin\alpha_3 = \overline{A_3B_3}$
$\sin\alpha_4 = \overline{A_4B_4}$

M = 1:4

Bild 42

b. Bestimmung der Sinusfunktionen für vier Winkel in den vier Quadranten mit Hilfe der Tabelle oder des Rechenschiebers

Die vier Winkelfunktionen der Aufgabe a sollen mit Hilfe der Tabelle oder des Rechenschiebers bestimmt werden.

$\alpha_1 = \mathbf{30°}$
Vorgehen:
Wir suchen in der Tabelle oder auf dem Rechenschieber den Wert für die Sinusfunktion:

$$\sin\alpha_1 = \mathbf{0{,}5}$$

Die Bestimmung der Winkelfunktionen für Winkel im ersten Quadranten ist einfach. Alle Funktionswerte für die Winkel zwischen 0° und 90° lassen sich direkt aus der Tabelle ablesen. Wenn wir versuchen, die Funktionswerte mit dem Rechenschieber zu bestimmen, so stellen wir fest, dass wir die Sinusfunktion für Winkel, die kleiner als 6° und die Kosinusfunktion für Winkel, die grösser als 84° sind, nicht direkt ablesen können. Auch bei der Bestimmung der Werte der Tangens – und Kotangensfunktion treten Schwierigkeiten auf, indem nur für Winkel bis 45° die Tangensfunktion direkt ablesbar ist, während die Kotangenswerte ab 45° direkt abgelesen werden können. Wir werden in einem späteren Abschnitt lernen, wie man trotzdem alle Funktionswerte mit dem Rechenschieber auffinden kann.

α_2 = **130°**

Vorgehen:

– Bestimmung des Quadranten:	α_2 liegt im II. Quadranten
– Bestimmung des Vorzeichens:	Das Vorzeichen ist positiv
– Bestimmung des Wertes:	sin α_2 = **0,766**

Um den Wert zu bestimmen, ist es notwendig, dass man zuerst den Winkel zwischen 0° und 90° sucht, der inbezug auf den Zahlenwert der Funktion dem Winkel von 130° entspricht. Wir führen den Winkel im II. Quadranten in den I. zurück, indem wir α_2 von 180° subtrahieren (180°–130° = 50°).

α_3 = **250°**

Vorgehen:

– Bestimmung des Quadranten:	α_3 liegt im III. Quadranten
– Bestimmung des Vorzeichens:	Das Vorzeichen ist negativ
– Bestimmung des Wertes:	sin α_3 = **–0,940**

Wir wiederholen die gleichen Überlegungen und suchen denjenigen Winkel zwischen 0° und 90°, der den gleichen Funktionswert aufweist wie der gesuchte Winkel. Anhand der Zeichnung im Einheitskreis sehen wir, dass wir für Winkel, die im dritten Quadranten liegen, anders vorgehen müssen, um den Funktionswert zu ermitteln. Wir ziehen vom gegebenen Winkelwert 180° ab und erhalten dann den Winkel mit dem gleichen Funktionswert im I. Quadranten (250°–180° = 70°). Der Wert des Winkels von 70° stimmt inbezug auf den Betrag mit dem Winkel von 250° überein, die Vorzeichen sind jedoch nicht gleich.

$\alpha_4 = \mathbf{330°}$

Vorgehen:

- Bestimmung des Quadranten: α_4 liegt im IV. Quadranten
- Bestimmung des Vorzeichens: Das Vorzeichen ist negativ
- Bestimmung des Wertes: $\sin \alpha_4 = \mathbf{-0{,}5}$

Der Einheitskreis lehrt uns, dass für Winkel im vierten Quadranten die Ergänzung auf 360° gesucht werden muss. Das heisst für unser Beispiel: 360°–330° = 30°. Der Winkel von 30° weist einen Funktionswert auf, welcher inbezug auf den Betrag mit demjenigen von 330° übereinstimmt; jedoch mit negativem Vorzeichen.

c. Bestimmung verschiedener Winkelfunktionen in den vier Quadranten

cos vom $\sphericalangle \alpha = \mathbf{150°}$

Vorgehen:

- Bestimmung des Quadranten: Der Winkel liegt im II. Quadranten
- Bestimmung des Vorzeichens: Das Vorzeichen ist negativ
- Bestimmung des Wertes: $\cos \alpha = \mathbf{-0{,}866}$

Es gelten die gleichen Überlegungen wie für Aufgabe b.

tg vom $\sphericalangle \alpha = \mathbf{220°}$

Vorgehen:

- Bestimmung des Quadranten: Der Winkel liegt im III. Quadranten
- Bestimmung des Vorzeichens: Das Vorzeichen ist positiv
- Bestimmung des Wertes: $\text{tg}\, \alpha = \mathbf{0{,}839}$

Für die Bestimmung des Wertes der Funktion gelten die gleichen Regeln wie für die Sinusfunktion.

In Bild 43 wird gezeigt, wie das Vorzeichen ermittelt wurde. Der Wert des tg α ist bestimmt durch das Verhältnis $\overline{AB}$ zu $\overline{OA}$. Beide Strecken weisen ein negatives Vorzeichen auf. Die Regeln der Algebra lehren uns, dass die Division eines negativen Wertes durch einen negativen Wert einen positiven Wert ergibt.

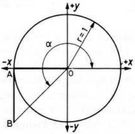


Bild 43

ctg vom $\sphericalangle\ \alpha = \mathbf{310°}$

Vorgehen:

– Bestimmung des Quadranten:	Der Winkel liegt im IV. Quadranten
– Bestimmung des Vorzeichens:	Das Vorzeichen ist negativ
– Bestimmung des Wertes:	ctg $\sphericalangle\ \alpha = \mathbf{-0{,}839}$

Wert der Funktion und Vorzeichen werden nach den gleichen Regeln bestimmt wie bei der vorhergehenden Aufgabe.

tg vom $\sphericalangle\ \alpha = \mathbf{130°}$

Vorgehen:

– Bestimmung des Quadranten:	Der Winkel liegt im II Quadranten
– Bestimmung des Vorzeichens:	Das Vorzeichen ist negativ
– Bestimmung des Wertes:	tg $\alpha = \mathbf{-1{,}192}$

5. Das Wesentliche

In der Wechselstromtechnik arbeitet man mit den Winkelfunktionen, um Ströme und Spannungen mit verschiedenen Phasenlagen darzustellen, und um die entsprechenden Wechselstromkreise zu berechnen.
Den Winkelfunktionen liegt das rechtwinklige Dreieck zugrunde. Jede Winkelfunktion wird durch ein Verhältnis, das von zwei Dreieckseiten gebildet wird, ausgedrückt.
Im Einheitskreis können die Funktionswerte direkt ermittelt werden. Bild 44 zeigt das Verfahren der graphischen Ermittlung der Funktionswerte.

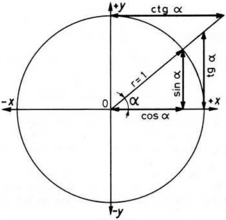


Bild 44

Die Vorzeichen der Funktionswerte ändern sich in den verschiedenen Quadranten. Um den Funktionswert zu ermitteln, projiziert man die eine der bei-

den Katheten des rechtwinkligen Dreieckes auf die X- bzw. Y-Achse des Koordinatensystems.
Bild 45 zeigt hierzu ein Beispiel.

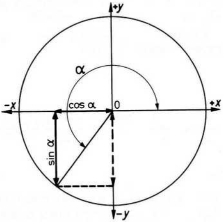


Bild 45

Winkel werden im Bogen- oder Gradmass gemessen. Im Gradmass hat der volle Winkel 360°, im Bogenmass entsprechen dem vollen Winkel 2π.

6. Repetitionsaufgaben (Lösung Seite 431)

a) Bestimmen Sie zeichnerisch mit Hilfe des Einheitskreises die vier Winkelfunktionen für die folgenden Winkel:
$\alpha_1 = 29°$, $\alpha_2 = 127°$, $\alpha_3 = 250°$, $\alpha_4 = 310°$, (r = 8 cm)
b) Überprüfen Sie die gefundenen Werte mit Hilfe der Tabelle oder eines Rechenschiebers.
c) Bestimmen Sie zu den folgenden Winkeln das Bogenmass:
$\alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = 45°$, $\alpha_3 = 90°$, $\alpha_4 = 130°$, $\alpha_5 = 210°$, $\alpha_6 = 345°$
d) Bestimmen Sie zu den folgenden Winkelfunktionen die dazugehörigen Winkel im Gradmass:
$\sin \alpha_1 = 0{,}643$, $\cos \alpha_2 = 0{,}574$, $\operatorname{tg} \alpha_3 = -0{,}577$, $\operatorname{ctg} \alpha_4 = 2{,}145$
e) Warum muss der Elektroniker die Winkelfunktionen beherrschen?
f) Warum sind in den Tabellen die Funktionswerte nur für Winkel zwischen 0° und 90° aufgeführt?
g) Eine elektrische Schaltung weist einen $\cos \varphi$ von 0,9 auf. Wie gross ist der entsprechende Phasenverschiebungswinkel?

II. Die Winkelfunktionen auf dem Rechenschieber

1. Einführung

Dieser Abschnitt wendet sich an solche, die mit dem Rechenschieber vertraut sind. Der vorliegende Stoff soll nicht einen Rechenschieberkurs ersetzen, wir werden uns ganz spezifisch nur mit den Winkelfunktionen auf dem Rechenschieber befassen. Wer keinen Rechenschieber besitzt und auch keinen Rechenschieber handhaben kann, der darf diese Kapitel überspringen. Es sei jedoch jedem geraten, sich einen Schieber oder eine Rechenscheibe zu beschaffen und sich in der Handhabung dieses Gerätes zu üben. Der Schieber hilft sehr viel Zeit und Mühe sparen. Der Elektroniker kommt kaum ohne dieses Hilfsmittel aus.

2. Was wissen Sie schon über die Winkelfunktionen auf dem Rechenschieber? (Lösung Seite 433)

a) Bestimmen Sie den Sinus für einen Winkel von 25°.
b) Bestimmen Sie den Kosinus für einen Winkel von 55°.
c) Welchem Winkel entspricht der Wert der Tangensfunktion tg $\alpha = 0{,}6$?
d) Bestimmen Sie den Kotangens von 30°.
e) Wie gross ist der Sinus eines Winkels von 3°?

3. Die Winkelfunktionen auf dem Rechenschieber

a. Die Sinusfunktion

Die Werte zwischen 5,5° und 90° lassen sich auf den meisten Schiebern direkt ablesen. Die Sinusfunktion für Winkel, die kleiner als 5,5° sind, lässt sich da-

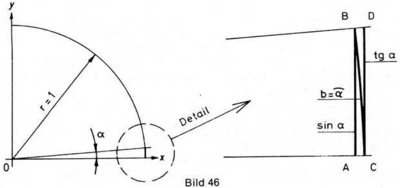


Bild 46

gegen auf den meisten Rechenschiebern nicht direkt ablesen. Eine einfache Methode erlaubt trotzdem die Bestimmung dieser Funktionswerte. Wir wollen das Verfahren mit Hilfe von Bild 46 entwickeln.
Wir betrachten die beiden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ im vergrösserten Bildausschnitt und stellen fest, dass sich die Strecken in bezug auf ihre Längen nur ganz geringfügig unterscheiden. Je kleiner der Winkel gewählt wird, desto geringer wird der Längenunterschied. Dasselbe kann über die Länge des Bogens b gesagt werden. Wir dürfen für kleine Winkel folgende Vereinfachung vornehmen:

Für Winkel, die kleiner sind als 7°, sind die Werte der Sinusfunktion, der Tangensfunktion und des Bogens praktisch gleich gross.

Anhand einer Tabelle überprüfen wir diese Aussage, indem wir für einen Winkel α von 7° die genauen Werte einander gegenüberstellen:
$\sin \alpha^\circ = 0{,}1219$,
$\mathrm{tg}\, \alpha^\circ = 0{,}1228$
$\widehat{\alpha} = 0{,}1221$ rad
Wir stellen fest, dass der grösste Fehler kleiner als ein Prozent ist.
Um nun die Sinus- und Tangensfunktionen für *kleine* Winkel zu errechnen, erlauben wir uns folgende Vereinfachung:

$$\mathrm{tg}\, \alpha \approx \sin \alpha \approx \widehat{\alpha} \text{ (wenn } \alpha \text{ kleiner als } 7^\circ)$$

Die Berechnung der Bogenlänge, das entspricht im Einheitskreis dem Bogenmass, ergibt als Resultat direkt den Funktionswert für den Sinus oder den Tangens. Diese Überlegung führt zu folgender Berechnungsformel:

$$\text{für } \alpha < 7^\circ \text{ wird } \mathrm{arc}\, \alpha = \widehat{\alpha} = b = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ \approx \sin \alpha \approx \mathrm{tg}\, \alpha$$

b. Die Kosinusfunktion

Die Werte zwischen 0° und 84,5° lassen sich auf den meisten Schiebern direkt ablesen. Funktionswerte für Winkel, die grösser sind als 84,5° lassen sich dagegen meistens nicht direkt ablesen. Bild 47 zeigt uns eine Methode, wie wir die Kosinusfunktionen grosser Winkel berechnen können. Das Grundprinzip unterscheidet sich nicht von demjenigen für die Bestimmung der Sinusfunktionen kleiner Winkel. Wir stellen die gleichen Überlegungen an und nehmen dieselben Vereinfachungen vor.
Die Strecke $\overline{OA}$ im Einheitskreis entspricht dem Wert der Kosinusfunktion. Die Strecke $\overline{GH}$ in der Vergrösserung ist annähernd gleich lang wie $\overline{OA}$, sie stellt deshalb ebenfalls den Wert der Kosinusfunktion dar. $\overline{EF}$ entspricht dem Kotangens. Für grosse Winkel darf vereinfacht werden:
$\overline{GH} \approx \overline{EF} \approx \widehat{90^\circ - \alpha} \approx \cos \alpha \approx \mathrm{ctg}\, \alpha$ (für Winkel zwischen 83° und 90°)
Um die Kosinus- oder Kotangensfunktion für Winkel zwischen 83° und 90° zu

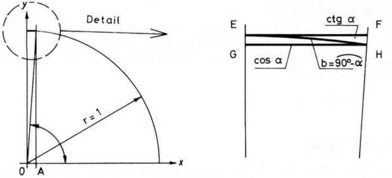


Bild 47

berechnen, haben wir lediglich nach dem bekannten Verfahren das Bogenmass im Einheitskreis für den Winkel α zu bestimmen.

$$\cos \alpha = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot (90^\circ - \alpha^\circ)$$

$$\text{ctg}\, \alpha = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot (90^\circ - \alpha^\circ)$$

Bessere Rechenschieber haben eine Skala für das Bogenmass für Winkel zwischen 0,55° und 6°. Als Einheit wird meistens ∢ arc angegeben. Mit dieser Skala lassen sich Sinus- und Tangensfunktionen für kleinere Winkel als 6° und Kosinus- und Kotangensfunktionen für Winkel grösser als 84° direkt ermitteln, da für diese Winkel der Bogen (arc = *Arcus* = Bogen) im Einheitskreis gleich dem Wert der Winkelfunktion ist.

c. Die Tangensfunktion

Die Tangensfunktion wird meistens für Winkel zwischen 5,5° und 45° auf einer Skala angegeben.
Spezielle Schieber verfügen auch noch über eine Tangensskala für Winkel von 45° bis 84,5°; wir werden jedoch bald erkennen, dass diese Skalen überflüssig sind. Wie man den Tangens für kleinere Winkel als 5,5° bestimmt, haben wir bereits besprochen. Wie wird nun aber der Tangens für Winkel von mehr als 45° gefunden? Wir wissen, dass die Tangensfunktion den Kehrwert der Kotangensfunktion darstellt; da der Schieber eine zweite Skala für die Kontangensfunktion der Winkel zwischen 45° und 84,5° aufweist, fällt es uns nicht schwer, die Tangensfunktion für grössere Winkel als 45° aufzufinden. Wir suchen den Wert der entsprechenden Kotangensfunktion und bestimmen dazu den Reziprokwert. Da die meisten Systeme eine Skala für den Reziprokwert aufweisen, lässt sich der gesuchte Wert der Tangensfunktion direkt ablesen.

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{1}{\text{ctg}\, \alpha}$$

d. Die Kotangensfunktion

Die Kotangensfunktion für Winkel zwischen 5,5° und 45° wird ebenfalls nach der vorhin gezeigten Methode eruiert. Wir suchen den Wert der Tangensfunktion für den betreffenden Winkel und erhalten durch Bildung des Reziprokwertes die Kotangensfunktion.

$$\text{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$

e. Die $\sqrt{1-x^2}$-Skala

Die meisten Systeme weisen eine Skala mit der Bezeichnung $\sqrt{1-x^2}$ auf. Unter Zuhilfenahme des Einheitskreises wollen wir die Möglichkeiten dieser Skala untersuchen. Bild 48 zeigt die Verhältnisse im Einheitskreis.

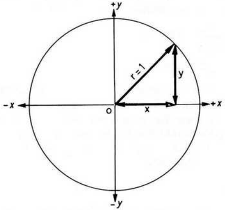


Bild 48

Wir können nach Pythagoras schreiben:

$$1 = \sqrt{x^2 + y^2};\ y^2 = 1-x^2;\ y = \sqrt{1-x^2}\ \text{und}$$
$$x^2 = 1-y^2;\ x = \sqrt{1-y^2}$$

Diese sehr nützliche Skala gestattet es uns also zu jeder Sinusfunktion gleichzeitig die Kosinusfunktion des gleichen Winkels abzulesen und umgekehrt. Wir brauchen nur an Stelle der Werte x und y; cos und sin zu setzen, um sofort zu sehen, dass beide Funktionen austauschbar sind.

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Von dieser Tatsache machen wir Gebrauch, wenn wir die Werte für Sinusfunktionen für grosse Winkel oder die Kosinusfunktionen für kleine Winkel mit ausreichender Genauigkeit bestimmen wollen. Auf dem Schieber sind diese Skalen gegen das rechte Schieberende hin zusammengedrängt, wodurch die Ablesegenauigkeit leidet. Unter Anwendung der $\sqrt{1-x^2}$-Skala gelangt man jedoch für die Ablesung auf die linke Seite des Schiebers, wo die Genauigkeit besser ist.

4. Beispiele

a) Gesucht: sin vom $\sphericalangle\, \alpha = \mathbf{40°}$

Vorgehen:
Auf der Sinusskala wird der Läufer auf 40° gestellt, auf der X-Skala können Sie den Funktionswert direkt ablesen.

$$\sin\alpha = \mathbf{0{,}643}$$

b) Gesucht sin vom $\sphericalangle\, \alpha = \mathbf{3°}$

Vorgehen:

– Formel für kleine Winkel anschreiben: $\sin\alpha \approx \dfrac{2\pi}{360°} \cdot \alpha°$

Werte einsetzen: $\sin\alpha \approx \dfrac{6{,}28}{360°} \cdot 3°$

$$\sin\alpha \approx \mathbf{0{,}0524}$$

Vorgehen für Schieber mit arc-Skala:
Auf der $\sphericalangle$ arc-Skala Läufer auf 3° stellen, auf der X-Skala ist der Funktionswert direkt ablesbar.

c) Gesucht: sin vom $\sphericalangle\, \alpha = \mathbf{82°}$

Vorgehen:
Läufer auf der Sinusskala auf 82° stellen, Wert auf der X-Skala direkt ablesen:

$$\sin\alpha = \mathbf{0{,}99}$$

Vorgehen für Schieber mit der $\sqrt{1-x^2}$-Skala:
Läufer auf der Kosinusskala auf 82° stellen, Funktionswert auf der $\sqrt{1-x^2}$-Skala ablesen.

$$\sin\alpha = \mathbf{0{,}9903}$$

Dieses Verfahren ergibt ein sehr genaues Resultat.

d) Gesucht: cos vom $\sphericalangle\, \alpha = \mathbf{75°}$

Vorgehen:
Läufer auf der Kosinusskala auf 75° stellen, Resultat auf der X-Skala ablesen.

$$\cos\alpha = \mathbf{0{,}259}$$

e) Gesucht: cos vom $\sphericalangle\ \alpha =$ **86°**

Vorgehen:

– Formel für grosse Winkel anschreiben $\cos\alpha \approx \frac{2\pi}{360°} \cdot (90° - \alpha)$

– Zahlenwerte einsetzen und ausrechnen $\cos\alpha \approx \frac{6{,}28}{360°} \cdot 4°$

$\cos\alpha \approx$ **0,07**

Vorgehen für Schieber mit $\sphericalangle$ arc-Skala:

– Winkel bestimmen $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$

$\cos 86° = \sin 4°$

– Auf der arc-Skala Läufer auf 4° stellen und auf X-Skala Funktionswert direkt ablesen.

$\cos\alpha =$ **0,07**

f) Gesucht: cos vom $\sphericalangle\ \alpha =$ **12°**

Vorgehen:

Läufer auf der Kosinusskala auf 12° stellen, Funktionswert auf der X-Skala ablesen.

$\cos\alpha =$ **0,978**

Vorgehen für Schieber mit der $\sqrt{1-x^2}$-Skala:

Läufer auf der Sinusskala auf 12° stellen, Ergebnis auf der *$\sqrt{1-x^2}$-Skala ablesen.*

$\cos\alpha =$ **0,9781**

Dank der $\sqrt{1-x^2}$-Skala wird das Resultat sehr genau.

g) Gesucht: tg vom $\sphericalangle\ \alpha =$ **35°**

Vorgehen:

Läufer auf der Tangensskala auf 35° stellen, Funktionswert auf der X-Skala ablesen.

$\mathrm{tg}\,\alpha =$ **0,7**

h) Gesucht: tg vom $\sphericalangle\ \alpha =$ **2°**

Vorgehen:

Gleiches Vorgehen wie bei Aufgabe b), da für so kleine Winkel $\mathrm{tg}\,\alpha \approx \sin\alpha \approx$ b.

$\mathrm{tg}\,\alpha \approx$ **0,0349**

i) Gesucht: tg vom $\sphericalangle\ \alpha =$ **68°**

Vorgehen:

Läufer auf Kotangensskala auf 68° oder Tangensskala auf 22° stellen, Funktionswert auf der 1/x-Skala ablesen.

$\mathrm{tg}\,\alpha =$ **2,475**

k) Gesucht: tg vom $\sphericalangle\ \alpha$ = **88°**

Vorgehen:

Bestimmen von cot 88° nach der Methode von Aufgabe e, da für so grosse Winkel cos α $\approx$ ctg α

ctg α $\approx$ 0,0349

Funktionswert für tg α auf 1/x-Skala ablesen.

tg α $\approx$ **28,6**

l) Gesucht: ctg vom $\sphericalangle\ \alpha$ = **70°**

Vorgehen:

Läufer auf der Kotangensskala auf 70° oder Tangensskala auf 20° stellen, Resultat auf der X-Skala ablesen.

ctg α = **0,364**

m) Gesucht: ctg vom $\sphericalangle\ \alpha$ = **87°**

Vorgehen:

Gleiches Vorgehen wie für Aufgabe e), da bei so grossen Winkeln cosα $\approx$ ctg α

ctg α = **0,0524**

n) Gesucht: ctg vom $\sphericalangle\ \alpha$ = **28°**

Vorgehen:

Läufer auf der Tangensskala auf 28° stellen, Funktionswert auf der 1/x-Skala ablesen.

ctg α = **1,88**

o) Gesucht: ctg vom $\sphericalangle\ \alpha$ = **1,5°**

Vorgehen:

Bestimmen von tg α gemäss Aufgabe h)

tg α $\approx$ 0,0262

Funktionswert für tg α auf 1/x-Skala ablesen.

ctg α $\approx$ **38,19**

5. Das Wesentliche

Die Handhabung eines Rechenschiebers zur Bestimmung der Winkelfunktionen für alle Winkel setzt die absolute Beherrschung der Verhältnisse im Einheitskreis voraus.

Sinus- und Kosinusfunktionen lassen sich mit Ausnahme der kleineren Winkel für die Sinusfunktion und der Winkel nahe bei 90° für die Kosinusfunktion direkt ablesen.
Für die kleineren Winkel der Sinus- und Tangensfunktion und die grossen Winkel der Kosinus- und der Kotangensfunktion lassen sich die Funktionswerte mit Hilfe des Bogenmasses errechnen, da in diesen Bereichen die Bogenlänge praktisch mit den Werten der gesuchten Winkelfunktionen übereinstimmt. Auf einem Rechenschieber mit einer Arcusskala für kleine Winkel lassen sich diese Operationen besonders einfach ausführen.
Die $\sqrt{1-x^2}$-Skala erlaubt eine genaue Bestimmung der Funktionswerte für Sinus- und Kosinusfunktionen, welche normalerweise auf der rechten Seite der Skalen abgelesen werden müssen. Diese Skala ist sehr wertvoll, da die Ablesegenauigkeit gegen die rechte Schieberseite hin erheblich abnimmt.
Die Skalen für die Tangens- und die Kotangensfunktionen ergänzen sich gegenseitig. Die Tangensfunktionen sind nur für Winkel bis 45° und die Kotangensfunktionen für solche ab 45° direkt ablesbar. Da die Tangensfunktion durch Bildung des Reziprokwertes der Kotangensfunktion errechnet werden kann, lassen sich Tangensfunktionen für grössere Winkel als 45° auf der 1/x-Skala direkt ablesen, unter der Voraussetzung, dass der Läufer für die Bestimmung der Tangensfunktion auf den Winkelwert der Kotangensfunktion gestellt wird und umgekehrt.

6. Repetitionsaufgaben (Lösung Seite 433)

Alle Aufgaben sind mit dem Rechenschieber zu lösen.
a) Bestimmen Sie den Sinus für einen Winkel von 2,6° = 2° 36′
b) Bestimmen Sie die Kosinusfunktion für einen Winkel von 11,7° = 11° 42′ möglichst genau.
c) Wie gross ist der Wert der Kotangensfunktion für einen Winkel von 86,8° = 86° 48′?
d) Bestimmen Sie den Tangens für einen Winkel von 67°.
e) Erklären Sie die Vorteile der $\sqrt{1-x^2}$-Skala.
f) Welche Vorteile bringt die ∢-arc-Skala.
g) Welche Vereinfachung ist dank der 1/x-Skala möglich?
h) Wie bestimmen Sie die Sinusfunktion von Winkeln, die kleiner als 6° sind, wenn der Rechenschieber keine ∢-arc-Skala aufweist?